Aide personnalisée

Le logarithme décimal

I. La fonction $log(x)$

La fonction $y = \log(x)$ est la réciproque de la fonction $y = 10^x$.

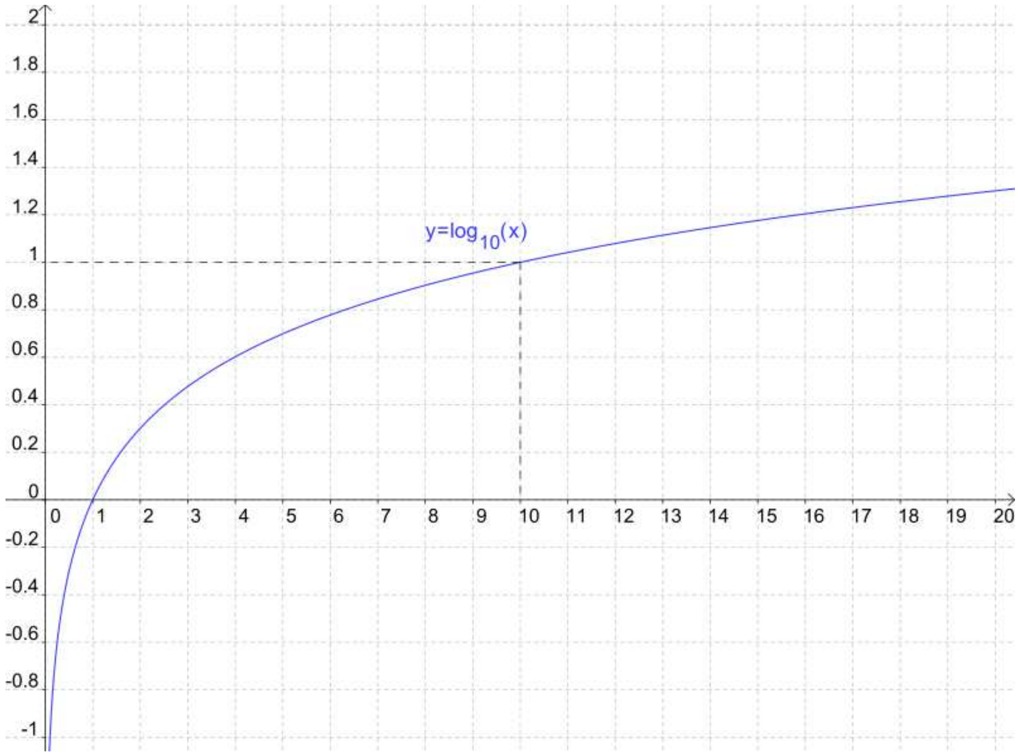
Exemple :

$\log(100) = 2{,}00$

donc $10^{2{,}00} = 100$

Ainsi, on aura :

- $\log(10^x) = x$
- $10^{\log(x)} = x$



Propriétés de la fonction :

$\log(1) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \log(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \log(x) = +\infty$

$\log(a) + \log(b) = \log(ab)$

$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

$\log(a^n) = n \cdot \log(a)$

Question :

A l'aide des propriétés données ci-dessus, montrer que : $-\log(a) = \log\left(\frac{1}{a}\right)$ et que : $\log(a^3) = 3\log(a)$

II. L'échelle logarithmique

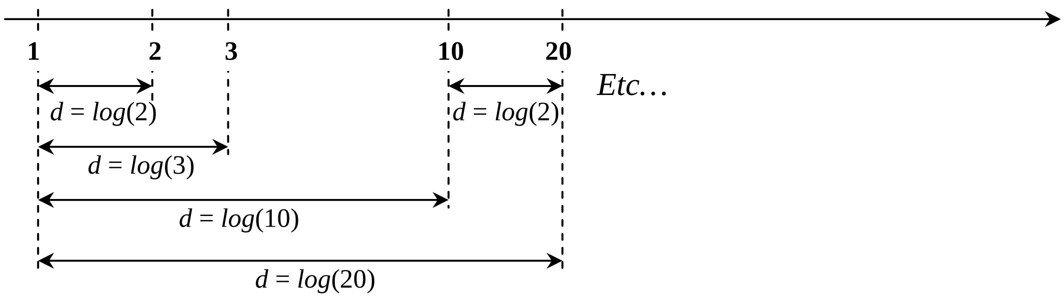
L'échelle logarithmique est utilisée pour représenter une fonction s'étalant sur plusieurs ordres de grandeur.

Questions :

a) Sur un axe [Ox) gradué de manière classique (dont on choisira l'échelle), placer les points suivants :
x = 2 ; x = 15 ; x = 54 ; x = 320 ; x = 6700 ; x = 9200

b) Quel problème rencontre-t-on ?

c) Tracer un axe horizontal en procédant comme suit :



d) Montrer que $\log(20) = \log(10) + \log(2)$

e) Placer les abscisses de la question a) sur cet axe. Que remarque-t-on ? Conclure.

III. Quelques exemples

1. <u>le pH</u>

Par définition, le pH d'une solution aqueuse vaut : $pH = \log\left(\frac{1}{[H_3O^+]}\right) \Leftrightarrow pH = -\log[H_3O^+]$

Avec $[H_3O^+]$ en mol/L

Questions :

a) Déterminer la relation donnant la concentration des ions oxonium en fonction du pH de la solution.

b) Calculer la concentration en ions oxonium dans un jus de citron de pH = 2,4.

c) Soit x la concentration en ion oxonium dans une solution aqueuse. Montrer que si cette concentration est divisée par 10, le pH augmente de 1,0.

d) Tracer un axe horizontal gradué en unité de pH.

e) Pour chaque unité de pH, indiquer sous l'axe la concentration en ions oxonium associée. Quelle est la nature de cette échelle ?

2. <u>Le niveau sonore</u>

Le niveau sonore L (ou niveau d'intensité sonore) exprimé en décibel (dB) est défini par la relation :

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Avec : I l'intensité du son capté par l'oreille
I_0 l'intensité minimale perceptible par l'oreille
$I_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-12} W \cdot m^{-2}$

Questions :

a) Déterminer le niveau sonore pour une intensité $I = 1{,}0\ W \cdot m^{-2}$ correspondant au seuil de douleur de l'oreille humaine.

b) Même question pour une intensité $I = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ W \cdot m^{-2}$ correspondant au seuil de danger pour l'oreille.

c) Montrer que si l'intensité sonore double, le niveau sonore capté par l'oreille augmente de 3 dB.

3. <u>L'échelle de Richter</u>

La magnitude de Richter est une échelle logarithmique de l'amplitude du mouvement du sol lors d'un séisme. Un séisme de magnitude 7 engendre des secousses d'une amplitude 10 fois plus importante qu'un séisme de magnitude 6. L'énergie est, quant à elle, multipliée par $\sqrt{1000} = 31{,}6$.

Cette échelle est dite ouverte car n'a, du moins en théorie, pas de limite supérieure.

L'échelle de Richter, bien que la plus connue du grand public, est désuète. Les sismologues utilisent aujourd'hui une autre échelle logarithmique appelée magnitude de moment sismique.