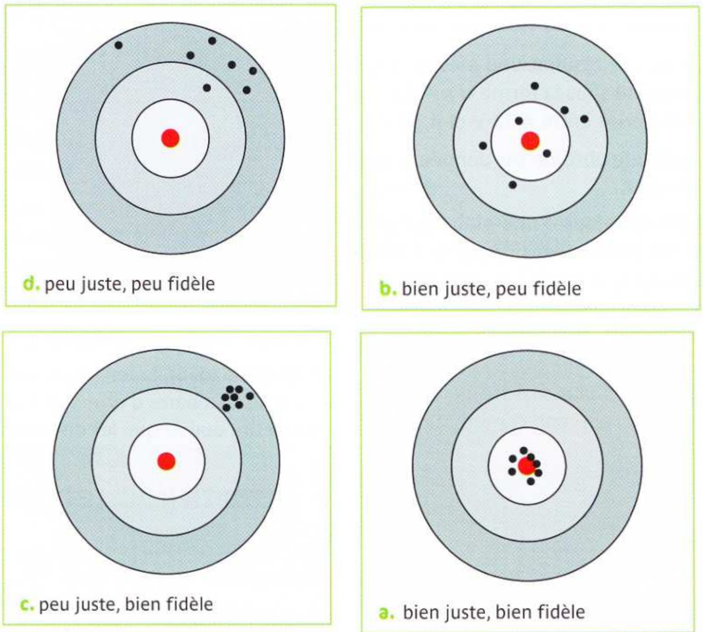
Les incertitudes

I. Mesure et incertitudes

- Mesurer une grandeur (température, masse, vitesse…) c'est rechercher la valeur de cette grandeur à l'aide d'un instrument de mesure.
- La ***valeur vraie*** d'une grandeur est sa valeur exacte, celle que l'on obtiendrait si la mesure était parfaite.
- Une mesure réelle, aussi soigneuse soit-elle, ne peut donner qu'une valeur approchée de la valeur vraie.
- On définit alors l'***intervalle de confiance*** dans lequel se trouvera la valeur vraie de la grandeur mesurée.
- Un ***intervalle de confiance de 95 %*** signifie que la probabilité de se tromper en disant que la valeur vraie se trouve dans l'intervalle ne dépasse pas 5 %

Effectuer une mesure avec un instrument revient à toucher le centre d'une cible (la valeur vraie) avec un arc (instrument de mesure). Considérons un archer qui cherche à viser le centre de sa cible :



Au début il vise n'importe comment :

- Il change de position à chaque tir : les tirs forment un nuage sur la cible (cas d et b), on dit que la **FIDELITE** de son tir est faible.

- Ceci met en évidence l'erreur **ALEATOIRE**.

- Si le nuage n'est pas centré sur le point rouge, c'est l'instrument qui est en cause.

Avec le temps il apprend à viser et corrige l'erreur ALEATOIRE :

- Les tirs sont groupés sur la cible

- Si les tirs groupés ne sont pas centrés, ce n'est plus de sa faute mais celle de l'instrument utilisé : il s'agit de l'erreur **SYSTEMATIQUE** qui va déterminer la **JUSTESSE** du tir.

Il existe deux manières d'exprimer une incertitude :

<u>Incertitude ABSOLUE</u> : Elle revient à donner l'intervalle de confiance.

Soit x_{MESURE} la valeur mesurée d'une grandeur et $U(x)$ l'incertitude (de l'anglais « *Uncertainty* ») liée à cette mesure, alors la valeur vraie x_{VRAIE} est telle que :

$$x_{MERSURE} - U(x) \leq x_{VRAIE} \leq x_{MESURE} + U(x) \quad \Leftrightarrow \quad x_{VRAIE} = x_{MESURE} \pm U(x)$$

Exemple : L_{VRAIE} = 3,8 ± 0,2 m ⇔ .... m ≤ L_{VRAIE} ≤ .... m

<u>Incertitude RELATIVE</u> : Elle donne la précision de la mesure.

Elle est donnée par la formule : $\dfrac{U(x)}{x_{MESURE}}$. On peut l'exprimer en % avec la formule : $\dfrac{U(x)}{x_{MESURE}} \times 100$

Exemple : L_{VRAIE} = 3,8 ± 0,2 m ⇔ Incertitude relative = …………………

Rmq :

- L'incertitude absolue ou l'incertitude relative sont généralement données avec un seul chiffre significatif.
- Par convention, l'incertitude sera toujours arrondie à la valeur supérieure. (ex : 0,08723 → 0,088)
- Le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être à la même position décimale que le dernier chiffre significatif de l'incertitude :

v = (57,925 ± 0,088) $m{\cdot}s^{-1}$ → **BIEN** v = (57,93 ± 0,088) $m{\cdot}s^{-1}$ → **PAS BIEN**

II. Détermination de l'incertitude absolue

<u>Incertitude de « type B »</u>

Lorsqu'une mesure n'est effectuée qu'une fois, on doit analyser les différentes sources d'erreurs liées à l'instrument de mesure.

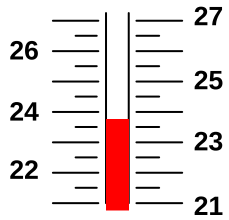
1. *Cas d'une lecture simple sur un axe gradué :*

Pour un intervalle de confiance de 95% lors d'une mesure nécessitant une lecture d'une échelle, l'incertitude est donnée par la relation :

$$U_{LECTURE\ SIMPLE} = \frac{2\ graduations}{\sqrt{12}}$$

Exemple : Mesure d'une température θ sur un thermomètre.

$$U(\theta) = \frac{2 \times 0{,}5}{\sqrt{12}} = 0{,}29°C$$



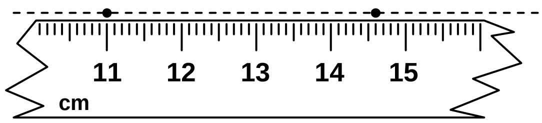
2. *Cas d'une lecture double sur un axe gradué :*

Pour un intervalle de confiance de 95% lors d'une mesure nécessitant une double lecture d'une échelle, l'incertitude est donnée par la relation :

$$U_{DOUBLE\ \ LECTURE} = \sqrt{2 \times \left(\frac{2\ graduations}{\sqrt{12}}\right)^2} = \sqrt{2} \times U_{LECTURE\ \ SIMPLE}$$

Exemple : Mesure d'une distance d avec une règle.

$$U(d) = \sqrt{2 \times \left(\frac{2 \times 0{,}1}{\sqrt{12}}\right)^2} = 0{,}082\ cm$$



3. *Cas d'une mesure effectuée par un appareil :*

Dans ce cas, le constructeur doit indiquer sur l'appareil ou dans la notice d'utilisation sa tolérance notée t. Pour un intervalle de confiance de 95%, l'incertitude liée à cette tolérance est alors donnée par la relation :

$$U_{TOLERANCE} = \frac{2\,t}{\sqrt{3}}$$

Exemple : Mesure du *pH* d'une solution aqueuse à l'aide d'un pH-mètre.
On lit dans la notice du pH-mètre : t = ± 0,2

$$U(pH) = \frac{2 \times 0{,}2}{\sqrt{3}} = 0{,}23$$

Questions :

a) Pour un calibre donné, un ampèremètre affiche une tolérance de ± 0,02 mA. Déterminer un encadrement de la valeur vraie de l'intensité si l'appareil indique à l'écran : 34,387 mA.

b) Une distance d = 8,36 m est donnée avec une incertitude relative de 0,5%. Déterminer la valeur de l'incertitude absolue et en déduire un encadrement de la valeur vraie.

c) Sur une burette graduée au dixième de mL, on effectue une chute (on vide la burette) de 5,3 mL. Déterminer l'incertitude du volume versé liée à la lecture des graduations.

Incertitude de « type A »

Lorsqu'une mesure peut être effectuée plusieurs fois dans les mêmes conditions expérimentales, on trouve généralement des résultats différents, plus ou moins proches de la valeur vraie. Plus une mesure est répétée, plus sa précision est augmentée (*cf*. loi de Student)

Le résultat expérimental retenu sera alors la ***valeur moyenne*** $\overline{m}$ de la série.

L'incertitude correspondant à des mesures répétées d'une même grandeur est appelée ***incertitude de répétabilité*** U_{REPET}.

Pour déterminer cette incertitude de répétabilité, il faut connaître l'***écart type*** σ de la série de mesures. Pour une série de n mesures indépendantes donnant des valeurs m_i, l'écart type est donné par la relation :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{m})^2}{n-1}}$$

L'incertitude de répétabilité associée à cette série de mesures est alors : $U_{REPET} = k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Avec k le ***facteur d'élargissement*** qui dépend du niveau de confiance désiré et du nombre n de mesures de la série (Loi de *Student*).

Extrait du tableau de la loi statistique de Student :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	∞
$k_{95\%}$	12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23	2.20	2.18	2.16	2.14	2.13	1.96
$k_{99\%}$	63.7	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17	3.11	3.06	3.01	2.98	2.95	2.58

Questions :

La mesure Δt de la durée de chute d'un objet depuis une fenêtre a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats obtenus, exprimés en seconde, sont les suivants :

1,38	1,45	1,41	1,45	1,43	1,41	1,46	1,39
1,43	1,48	1,38	1,44	1,40	1,42	1,39	1,44

La série des valeurs mesurées des durées précédentes conduit à un écart type $\sigma_{n-1} = 0{,}029\ 65\ s$

a) A l'aide de la calculatrice retrouver la valeur de l'écart type.

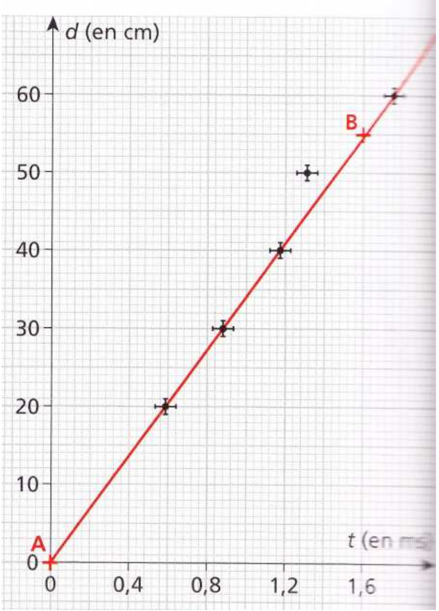
b) Déterminer l'incertitude de répétabilité pour un niveau de confiance de 95% et indiquer alors le résultat de l'expérience avec cette incertitude.

c) Même question pour un niveau de confiance de 99%.

Rmq :

Dans certains cas, une série de mesures permet de tracer une ***courbe d'étalonnage*** : Lorsque celle-ci se modélise par une droite, le coefficient directeur de la droite moyenne correspond à une forme de moyenne appelée ***REGRESSION***.
L'alignement des points valide la méthode de mesure en montrant que la mesure est bien répétable.

Cette courbe représente la distance parcourue par une onde sonore en fonction du temps. La pente de la droite moyenne (AB) détermine plus précisément la vitesse de l'onde qu'en divisant, pour une seule mesure, la distance par la durée.



III. Détermination d'une incertitude dans laquelle interviennent plusieurs sources d'erreurs

1. Grandeur mesurée

Lors d'une mesure, il est fréquent d'avoir plusieurs sources d'erreurs à prendre en compte.

Exemple :

Considérons une burette de 25 mL graduée au dixième de mL sur laquelle on peut lire une tolérance de ± 0,05 mL. Lorsqu'on cherche à verser un volume précis avec une burette graduée, l'incertitude sur ce volume souffre de deux facteurs :

- La double lecture des graduations (volume de départ et volume d'arrivée)
- L'imprécision de la position des graduations liée à la fabrication de la burette et qui est fixée par le constructeur avec la tolérance.

<u>Détermination de l'incertitude $U(V)$ sur le volume versé :</u>

- Incertitude de double lecture :

$$U_{DOUBLE \quad LECTURE} = \sqrt{2 \times \left(\frac{2 \ graduations}{\sqrt{12}} \right)^2} = \sqrt{2} \times U_{LECTURE \quad SIMPLE}$$

- Incertitude de tolérance :

$$U_{TOLERANCE} = \frac{2\,t}{\sqrt{3}}$$

- Incertitude totale :

$$U(V) = \sqrt{(\sqrt{2} \times U_{LECTURE \quad SIMPLE})^2 + (U_{TOLERANCE})^2}$$

$$\Leftrightarrow \ U(V) = \sqrt{2 \times (U_{LECTURE \quad SIMPLE})^2 + (U_{TOLERANCE})^2}$$

$$\Leftrightarrow \ U(V) = \sqrt{2 \times \left(\frac{2 \times 0{,}1}{\sqrt{12}} \right)^2 + \left(\frac{2 \times 0{,}05}{\sqrt{3}} \right)^2} = 0{,}1 \ mL$$

2. Grandeur calculée

L'incertitude sur une grandeur calculée est liée aux incertitudes de toutes les grandeurs intervenant dans son calcul.

Exemple :

Si $a = \frac{b \times c}{d}$ alors les incertitudes sont telles que : $\left(\frac{U(a)}{a} \right)^2 = \left(\frac{U(b)}{b} \right)^2 + \left(\frac{U(c)}{c} \right)^2 + \left(\frac{U(d)}{d} \right)^2$

$$\Leftrightarrow \ U(a) = a \times \sqrt{\left(\frac{U(b)}{b} \right)^2 + \left(\frac{U(c)}{c} \right)^2 + \left(\frac{U(d)}{d} \right)^2}$$

Questions :

Une moto parcourt une distance $d = (125{,}35 \pm 0{,}15) \ m$ en une durée $\Delta t = (2{,}164 \pm 0{,}002) \ s$.
Déterminer la vitesse moyenne de la moto ainsi que l'incertitude associée.

IV. Conclusion

Une mesure exprimée avec son incertitude doit toujours faire l'objet d'un regard critique. Si la mesure présente une incertitude relative supérieure à 5 %, il faut chercher à l'améliorer en utilisant un matériel plus précis et/ou en effectuant un plus grand nombre de mesures avec le plus de soin possible.