Dérivées et primitives

Dérivation — *Dérivation*

Position — Vitesse — Accélération

Intégration — *Intégration*

I. Détermination d'une dérivée

Soit $f(x)$: $f = 3\,x$

La dérivée de $f(x)$ s'écrit $f\,'(x)$ ou $\dfrac{d\ f(x)}{dx}$

Soit $x(t)$: $x = 3\,t$

La dérivée de $x(t)$ s'écrit $\dfrac{d\ x(t)}{dt}$

Déterminons par exemple une vitesse à partir …

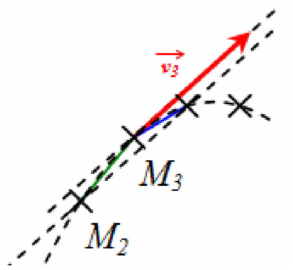
a. *D'un vecteur position :*

On utilise la relation $\vec{v} = \dfrac{d\ \overrightarrow{OM}}{dt}$

Si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} 3{,}0t^2 - 5{,}0t \\ 2{,}5t + 3{,}0 \end{pmatrix}$ alors $\vec{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$

Et la vitesse à la date t = 2,0 s vaut alors : $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b. *D'un relevé de positions :*

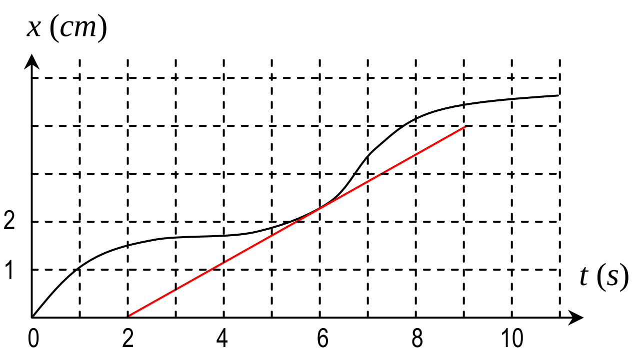


On utilise la relation $\vec{v} = \dfrac{\Delta\ \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$

Ainsi, la vitesse au point M_3 vaut :

$$\left\|\vec{v_3}\right\| = v_3 = \frac{M_2M_3 + M_3M_4}{2\,\tau}$$

c. *D'un graphe :*



On détermine la pente de la tangente à la date désirée. Ainsi, la vitesse du mobile selon l'axe (Ox) à la date t = 6,0 s vaut :

$$pente = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots - \ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

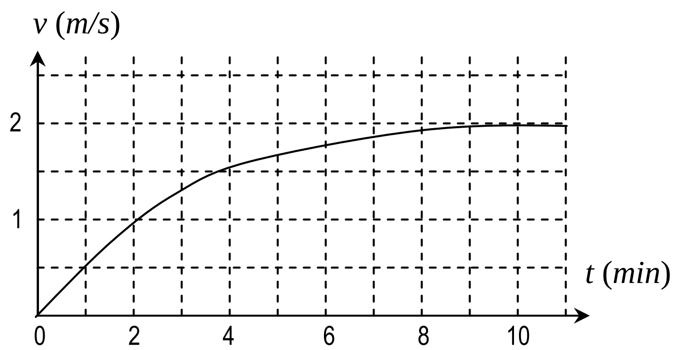
La pente de la tangente au point d'abscisse *t* d'une courbe donne la valeur de la dérivée à cette date

Questions :

a) Quelle est la grandeur que l'on calcule en déterminant la pente de la tangente à la courbe $v = f(t)$

b) Déterminer la valeur de cette grandeur dans le SI à la date t = 0 s.

c) D'après le graphe que devient cette grandeur pour un temps très long ? Justifier.



II. Détermination d'une primitive

Questions :

a. Quelle est la dérivée de $3t + 2$?

b. Même question pour $3t – 5$.

c. Conclure.

Exercice :

Soit une fonction $\alpha(t)$ telle que si on la dérive on obtient la fonction $\beta(t)$. On sait qu'à l'origine du temps la valeur de α est égale à 3,0. On sait aussi que la fonction $\beta(t)$ s'écrit : $\beta(t) = 2{,}0$.

$$\begin{tikzcd} \text{Alpha } \alpha \arrow[r, bend left, "\textit{Dérivation}"] & \text{Beta } \beta \arrow[l, bend left, "\textit{Intégration}"] \end{tikzcd}$$

a. Parmi les fonctions suivantes encercler celles qui, lorsqu'on les dérive, donnent $\beta(t)$.

$3{,}0\,t + 2{,}0$ $\quad$ $t + 2{,}0$ $\quad$ $2{,}0\,t - 5{,}0$ $\quad$ $2{,}0\,t^2 - 5{,}0$ $\quad$ t^2 $\quad$ $t^2 + 2{,}0\,t + 1{,}0$ $\quad$ $2{,}0\,t + 1{,}0$

b. Donner une formule générale des fonctions qui, lorsqu'on les dérive, donnent $\beta(t)$.

c. Parmi les fonctions encerclées en existe-t-il une qui peut être égale à $\alpha(t)$? Si oui laquelle ? Si non pourquoi ?

d. Donner l'expression correcte de la fonction $\alpha(t)$ telle qu'attendue par l'énoncé.

Exercice :

Soit une fonction $v(t)$ telle que si on la dérive on obtient la fonction $a(t)$. On sait que la fonction $a(t)$ s'écrit $a(t) = -9{,}8$ dans le SI.

a) Donner une formule générale de la fonction $v(t)$.

b) D'après cette expression, que vaut v à l'origine du temps ?

c) Si l'on sait qu'à l'origine du temps la valeur de v est égale à 3,0 donner alors l'expression générale de la fonction $v(t)$.

d) Que vaut v à la date $t = 12\ s$?

e) Sachant que la fonction $z(t)$ est telle que si on la dérive on obtient $-9{,}8\,t + 3{,}0$, que faut-il faire pour trouver l'expression de $z(t)$?

f) Parmi les expressions suivantes, encercler celle ou celles qui peuvent exprimer $z(t)$:

$-9{,}8t^2 + 3{,}0t - 1{,}0$ $\quad$ $-9{,}8t^2 + 3{,}0$ $\quad$ $-4{,}9t^2 + 3{,}0t$ $\quad$ $-4{,}9t^2 + 3{,}0$ $\quad$ $-4{,}9t^2 + 3{,}0t - 7{,}0$

$-9{,}8t^2 + 3{,}0t - 7{,}0$ $\quad$ $-4{,}9t^2 - 9{,}8$ $\quad$ $-9{,}8t^2 + 3{,}0t$ $\quad$ $-4{,}9t^2 + 3{,}0t + 4{,}5$ $\quad$ $-9{,}8$

g) Que faut-il alors connaître pour pouvoir choisir la bonne expression de $z(t)$?

h) On sait qu'à l'origine du temps le mobile est à l'origine du repère. Déterminer l'expression correcte de $z(t)$.

Formule générale pour la dérivée :

$$t^n \rightarrow n \cdot t^{n-1}$$

Formule générale pour la primitive :

$$t^n \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$