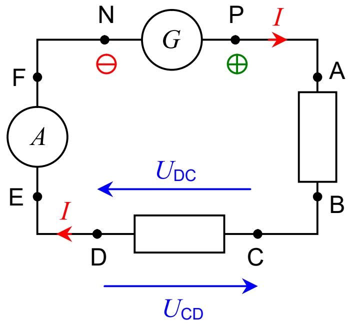
Ch. 13 : Le condensateur électrique

1. Rappels

1.1. Tension électrique



Pour faire naître une intensité électrique I dans un fil, il faut créer à ses bornes une différence de potentiels U (ou *d.d.p.*) appelée plus simplement tension.
Une *d.d.p.* se calcule ou se mesure en faisant la différence entre le potentiel électrique de deux points dans un circuit.

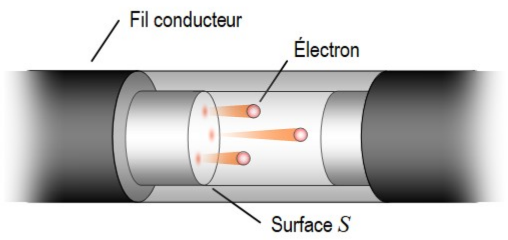
Par exemple, calcul de la tension (ou *d.d.p.*) U_{CD} : $\boxed{U_{CD} = V_C - V_D}$

A noter :

- Si $U_{CD} = V_C - V_D$, c'est donc que $U_{DC} = V_D - V_C$, et donc que : $\boxed{U_{CD} = - U_{DC}}$
- Deux points d'un circuit séparés par un fil ont le même potentiel électrique. Ici par exemple, $V_D = V_E$ et donc : $U_{ED} = V_E - V_D = 0\ V$
- L'ampèremètre mesure l'intensité électrique I dans un fil. Il se comporte comme un simple fil électrique. Donc $U_{FE} = U_A = 0\ V$

1.2. Intensité électrique

L'intensité I correspond à la charge électrique qui traverse la section d'un fil en une seconde.



$$\boxed{I = \frac{|Q|}{\Delta t}}$$ I en A ; Q en C ; Δt en s

$$\boxed{I = \frac{n \times \mathcal{F}}{\Delta t}}$$ I en A ; n en mol ; $\mathcal{F}$ en C/mol

Soit n la quantité (en mol) d'électrons qui a circulé à travers la section S du fil pendant une durée Δt.

La charge électrique de l'électron est : $q_{e-} = - e$

Donc la charge qui a traversé la section du fil pendant la durée Δt peut aussi s'écrire :

$Q = n \cdot \mathcal{N}_A \times |q_{e-}|$ ou $Q = n \cdot \mathcal{F}$ avec $\mathcal{F} = \mathcal{N}_A \times e$

A noter :

- Le faraday noté $\mathcal{F}$ est la charge électrique par mole d'électrons. Il vaut approximativement 96 500 C/mol.
- Dans la matière solide, le passage du courant est uniquement assuré par le déplacement d'électrons de charge $q_{e-} = - e$.

Exercice 1 :

En une heure, la section S d'un fil de cuivre est traversée par 2,3 $mmol$ d'électrons.

1. Déterminer la charge électrique Q que représente une telle quantité d'électrons.
2. En déduire l'intensité électrique I traversant ce fil.

1.3. Lois

Loi des nœuds : La somme des intensités arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités qui partent de ce nœud.

Loi des mailles : Le long d'une maille, la somme des tensions est nulle.

Loi d'Ohm : Aux bornes d'un conducteur ohmique ET EXCLUSIVEMENT : $\boxed{U_R = R \times I}$ U en V ; R en Ω ; I en A

Exercice 2 :

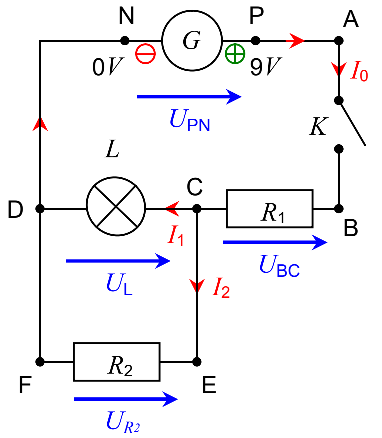
On considère le montage ci-contre avec l'interrupteur K initialement ouvert.

1. Préciser les points du circuit que l'on peut qualifier de nœud.
2. Que valent les intensités I_0, I_1 et I_2 ?
3. Montrer, à l'aide de la loi d'Ohm, que la tension U_{R_1} est donc forcément nulle.

On ferme à présent l'interrupteur. Le générateur débite alors une intensité I_0 = 79 mA.

4. Déterminer la tension $U_{R_1} = U_{BC}$ (*loi d'Ohm*).
5. En déduire la tension $U_{R_2} = U_{EF}$ (*loi des mailles*).
6. Déterminer alors l'intensité I_2 (*loi d'Ohm*).
7. En déduire la valeur de I_1 (*loi des nœuds*).
8. Que vaut la tension aux bornes de la lampe ?

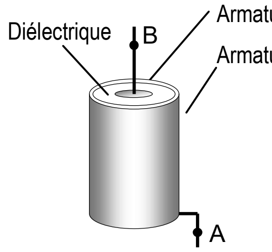
Données : R_2 = 50 Ω ; R_1 = 100 Ω

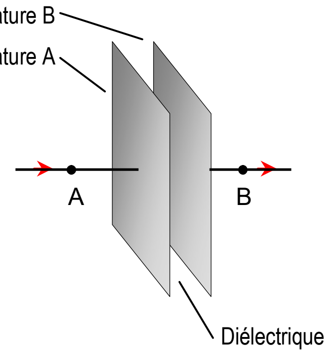


2. Le condensateur

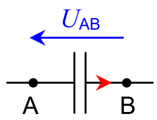
2.1. Définition

Le condensateur est un récepteur électrique constitué, dans sa version élémentaire, de deux armatures planes mises en vis-à-vis et séparées par une fine couche d'isolant appelé diélectrique.

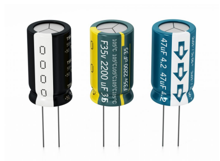




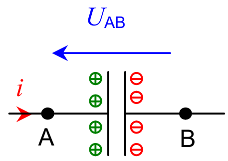
La représentation du condensateur dans un circuit électrique est :



La caractéristique d'un condensateur est sa capacité C exprimée en farads (F) (à ne pas confondre avec le faraday ($\mathcal{F}$) qui n'est pas une unité mais une constante.
La valeur de la capacité varie de l'ordre du pF (10^{-12} F) au mF (10^{-3} F)



2.2. Fonctionnement



Si l'on branche un condensateur déchargé aux bornes d'un générateur, une intensité apparaît dans le circuit. Les plaques A et B du condensateur se chargent grâce aux électrons qui circulent dans le circuit :
Des électrons arrivent sur l'armature B. Ne pouvant plus aller nulle part du fait du diélectrique, les électrons s'accumulent sur la plaque B et la charge négativement. Chaque électron arrivant sur l'armature B incite un électron de l'armature A (initialement neutre) à quitter l'armature. L'armature A se charge alors progressivement de manière positive.

Il s'établit un champ électrique E entre les deux armatures qui se charge peu à peu à la même vitesse : $\boxed{q_A = -q_B \quad \forall t}$

Si la charge de l'armature A augmente d'une petite quantité positive notée $d\,q_A$ pendant une petite durée notée dt, c'est donc que pendant cette même petite durée, l'intensité i du courant a fait circuler la charge $d\,q_A$ dans chaque section du circuit. On en déduit donc que :

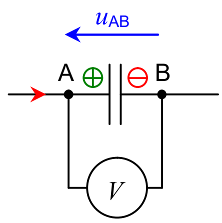
$$\boxed{i = \frac{d\,q_A}{dt}}$$

- La charge q_A de l'armature A varie au cours du temps (idem pour q_B).
- L'intensité électrique i est la dérivée de la fonction $q_A(t)$.

A noter :

- Si $i = \frac{d\,q_A}{dt}$ c'est donc que logiquement $i = -\frac{d\,q_B}{dt}$
- En électricité, une grandeur constante s'écrit généralement avec une majuscule et une grandeur variable avec une minuscule.

2.3. La caractéristique du condensateur



Lorsqu'on charge les armatures d'un condensateur, la tension à ses bornes augmente.
On peut facilement la mesurer avec un voltmètre.

On remarque alors que $\forall$ q_A (= - q_B), on aura : $q_A(t) = Cste \times u_{AB}(t)$ $\Leftrightarrow$ $q_A(t) = Cste \times u_C(t)$

Cette constante, appelée la *capacité* et notée C, est propre à chaque condensateur et dépend de ses caractéristiques physiques.

A retenir :

- La tension u_C aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à sa charge q :

$$\boxed{q = C \times u_C}$$

q en C (coulombs)
C en F (farads)
u_C en V

- La capacité C d'un condensateur dépend de ses caractéristiques physiques :

$$\boxed{C = \varepsilon \times \frac{S}{d}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S\,(m^2) & \text{la surface d'une armature} \\ d\,(m) & \text{l'épaisseur du diélectrique} \\ \varepsilon\,(F{\cdot}m^{-1}) & \text{la permittivité du diélectrique} \end{cases}$$

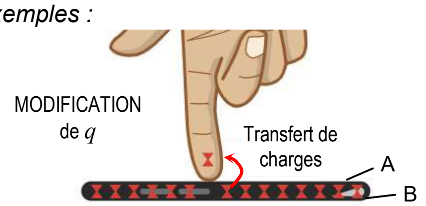
Le condensateur est en train de se charger, donc q varie en fonction du temps et s'écrira alors avec une minuscule. Or, si q varie, c'est donc que u_C aussi et cette tension s'écrira alors aussi avec une minuscule.

2.4. Capteurs capacitifs

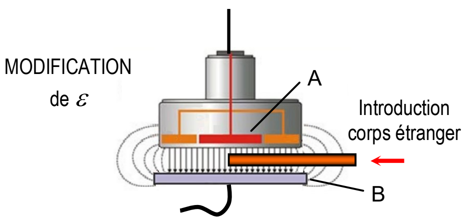
La tension aux bornes d'un condensateur a donc pour expression complète : $u_C = \frac{q}{C}$ $\Leftrightarrow$ $u_C = \frac{q \cdot d}{\varepsilon \cdot S}$

Donc, si l'on modifie d, ε ou q pour un condensateur chargé, on modifiera du même fait la tension à ses bornes.
On peut donc utiliser un condensateur chargé comme un détecteur en mesurant simplement les variations de la tension à ses bornes.

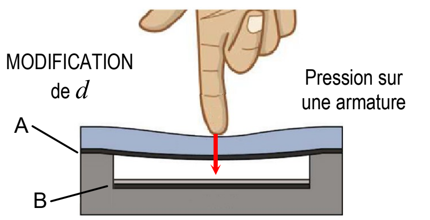
Exemples :



Lorsqu'un doigt (qui est un conducteur électrique) touche un écran capacitif, il y a transfert de charges vers le doigt, ce qui permet de détecter sa position.



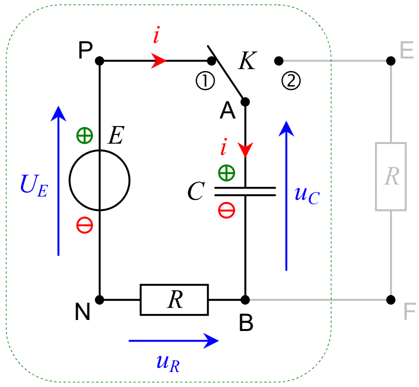
En introduisant un objet (ou de l'humidité) entre les électrodes du condensateur, on modifie la permittivité ε du diélectrique.



Les capteurs de pression ou de déplacement sont constitués d'une armature mobile et d'une armature fixe. Une pression modifie la distance d des armatures.

3. Charge

Circuit de charge



On considère le montage électrique ci-contre. A l'origine du temps, l'interrupteur K est placé en position ① et le condensateur est initialement déchargé : $q_A = q_B = 0\ C$

Comme à $t = 0$ on a : $q_A(0) = 0\ C$

Alors : $u_C(0) = 0\ V$ car $q_A(t) = C \times u_C(t)$

Loi des mailles : $U_E - u_C(t) - u_R(t) = 0$

⇔ $E = u_C(t) + u_R(t)$ car $U_E = E\ \forall t$

⇔ ❶ $E = u_C(t) + R \times i(t)$ car $u_R = R \times i$ (loi d'Ohm)

Or, on a aussi : $i(t) = \dfrac{d\, q_A(t)}{dt}$ ou plus simplement : $i = \dfrac{d\, q_A}{dt}$

⇔ $i(t) = \dfrac{d\,(C \cdot u_C)}{dt}$ car $q_A(t) = C \times u_C(t)$

⇔ ❷ $i(t) = C \times \dfrac{d\, u_C}{dt}$ car C est une constante

En remplaçant ❷ dans ❶ on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante : ***A faire :*** Détailler ce calcul

❸ $$\boxed{\frac{d\, u_C}{dt} + \frac{1}{RC} \times u_C = \frac{E}{RC}}$$

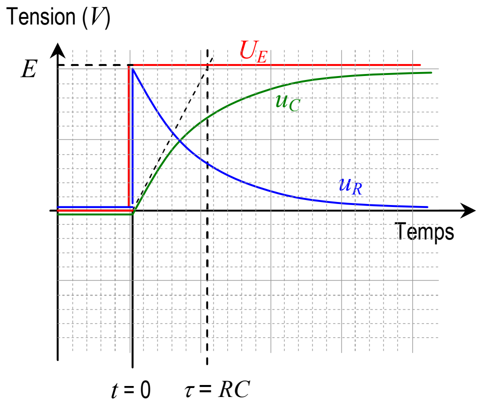
La solution d'une telle équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{u_C(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} + B}$$

A noter :

- Au début, le condensateur est en train de se charger, donc la tension $u_C(t)$ à ses bornes augmente.
- Comme à chaque instant de la charge $u_C(t) + u_R(t) = E$, le fait que $u_C(t)$ augmente implique que $u_R(t)$ diminue.
- Au bout d'un certain temps de ce régime de charge, la tension $u_C(t)$ atteindra la valeur de E et donc la tension $u_R(t)$ deviendra nulle
  En conséquence, c'est l'intensité qui deviendra nulle, ce qui stoppera la charge du condensateur.

  On aura alors : $u_C(t) = E$ et $u_R(t) = 0$



Pour trouver la valeur de la constante de temps τ, on fait soit le calcul $\tau = RC$ ou alors on prend la tangente à u_C à l'origine du temps et on regarde l'abscisse ou elle coupe la droite $y = E$.

Recherche de l'expression de A, B :

A l'origine du temps on a : $q_A(0) = 0$ ⇔ $u_C(0) = A \cdot e^{-k \times 0} + B = 0$

⇔ ❹ $A + B = 0$ car $e^{-k \times 0} = e^0 = 1$

A la fin de la charge ($t \to \infty$) on a : $u_C(\infty) = A \cdot e^{-k \times \infty} + B = E$

⇔ ❺ $B = E$ car $e^{-k \times \infty} = e^{-\infty} = 0$

Avec ❹ et ❺ on obtient la solution : ❻ $u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-k \times t}\right)$ ***A faire :*** Détailler ce calcul

Recherche de l'expression de k :

En développant l'expression ❻ on obtient : $u_C(t) = E - Ee^{-k \times t}$ et donc : $\dfrac{d\, u_C(t)}{dt} = kE \times e^{-k \times t}$

L'équation différentielle ❸ devient donc : $kE \cdot e^{-k \cdot t} + \dfrac{E - Ee^{-k \cdot t}}{RC} = \dfrac{E}{RC}$

⇔ $E \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \left(k - \dfrac{1}{RC}\right) = 0$ ***A faire :*** Détailler ce calcul

Or, un produit de facteur est nul si au moins l'un des facteurs est nul. Et ici, le seul facteur pouvant être nul si t varie, c'est le dernier :

$k - \dfrac{1}{RC} = 0$ ⇔ $k = \dfrac{1}{RC}$

La solution de l'équation différentielle ❸ s'écrit donc :

$$u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \times t}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{u_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \times t}\right)} \quad \text{en posant : } \boxed{\tau = R \times C}$$

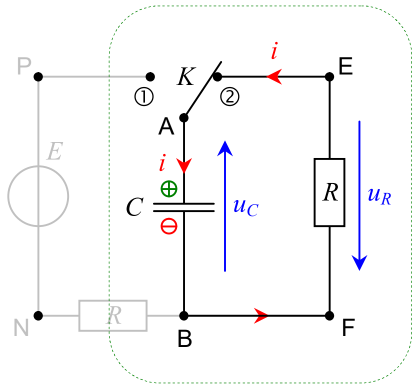
A retenir :

- τ est appelé la constante de temps du circuit RC.
- Lors d'une charge, le condensateur est chargé à plus de 99% pour une durée égale à 5 τ

4. Décharge

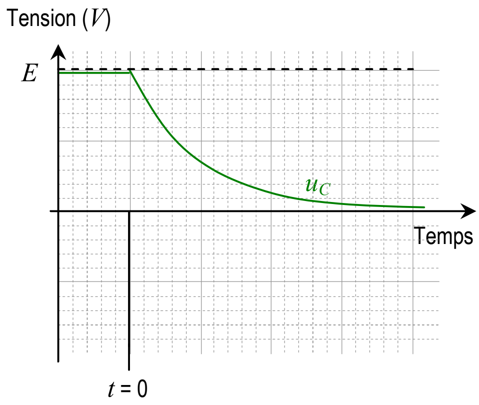
Une fois le condensateur chargé, on bascule l'interrupteur K en position ② en déclanchant à nouveau un chronomètre pour avoir une nouvelle origine du temps $t = 0$.
Le condensateur va donc se décharger dans le conducteur ohmique R tel un générateur de tension variable. En effet, comme en se déchargeant, sa charge q_A diminue, la tension à ses bornes aussi (car $q_A = C \times u_C$).
Si l'on garde la même orientation pour i que dans le cas de la charge du condensateur, on aura donc maintenant une intensité négative.

Circuit de décharge



Exercice 3 :

1. Exprimer uniquement en fonction de E et de C :
   - la charge q_A du condensateur à $t = 0$.
   - la tension du condensateur à l'origine du temps $u_C(0)$.
2. Quelle relation mathématique lie les tensions u_C et u_R ?
3. Etablir, à partir de la relation trouvée à la question précédente, l'équation différentielle suivante : $\frac{d\,u_C}{dt} + \frac{1}{RC} \times u_C = 0$
4. Avant la nouvelle origine du temps considérée dans cette partie, lorsque l'interrupteur n'était pas encore basculé en position ②, quelle était la valeur de l'intensité i dans le circuit de décharge ? En déduire la valeur de u_R durant cette phase.
5. A partir du résultat des questions 2 et 4, tracer en bleu l'allure de la courbe représentant $u_R(t)$ sur le graphique ci-contre.
6. Sachant que pour trouver graphiquement la valeur de la constante de temps τ, il faut prendre la tangente à u_C à l'origine du temps et relever l'abscisse où cette tangente coupe l'axe des abscisses, faire cette construction sur le graphe ci-contre et matérialiser en rouge la position de τ.



A noter :

- Au bout d'un temps égal à 5τ, le condensateur s'est vidé à plus de 99%. On considère alors qu'il est complètement vide.
  On aura alors : $u_C(t) = 0$ et $u_R(t) = 0$
- Lors de la décharge du condensateur, la charge q_A diminue. Donc la dérivé de la fonction $q_A(t)$ est négative.
  Or comme $i(t) = \frac{d\,q_A(t)}{dt}$, l'intensité dans le circuit est donc bien négative.

L'équation différentielle de la décharge s'écrit : $\boxed{\frac{d\,u_C}{dt} + \frac{1}{RC} \times u_C = 0}$

Cette équation différentielle étant du premier ordre, sa solution est du type : $\boxed{u_C(t) = A \cdot e^{-k \cdot t} + B}$

Recherche de l'expression de A, B et k :

Exercice 4 :

1. Montrer qu'à la date $t = 0$ cette solution de u_C donne l'équation : $A + B = E$
2. Quelle équation obtient-on à l'aide de l'expression générale de la solution de u_C lorsque le condensateur est entièrement déchargé ?
3. Déduire des deux questions précédentes que la solution générale peut aussi s'écrire :
$$\boxed{u_C(t) = Ee^{-k \times t}}$$
4. Déterminer alors l'expression de la dérivée de $u_C(t)$.
5. En plaçant les expressions de $u_C(t)$ et de sa dérivée dans l'équation différentielle de la décharge, montrer que l'on obtient l'équation :
$$E \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \left(\frac{1}{RC} - k \right) = 0$$
6. En déduire l'expression de la constante k.

La solution de l'équation différentielle de la décharge du condensateur s'écrit donc :

$$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{1}{RC} \times t} \quad \text{ou} \quad \boxed{u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \times t}} \quad \text{en posant :} \quad \boxed{\tau = R \times C}$$

A retenir :

- La constante de temps τ est donc la même que pour la charge.
- Lors d'une décharge, le condensateur s'est vidé à plus de 99% pour une durée égale à $5\,\tau$