Ch. 3 : Décrire un mouvement

1. La cinématique

La **cinématique** est l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le provoquent.

Le référentiel est un endroit de référence par rapport auquel on étudie le mouvement d'un mobile.

A chaque référentiel est associé :

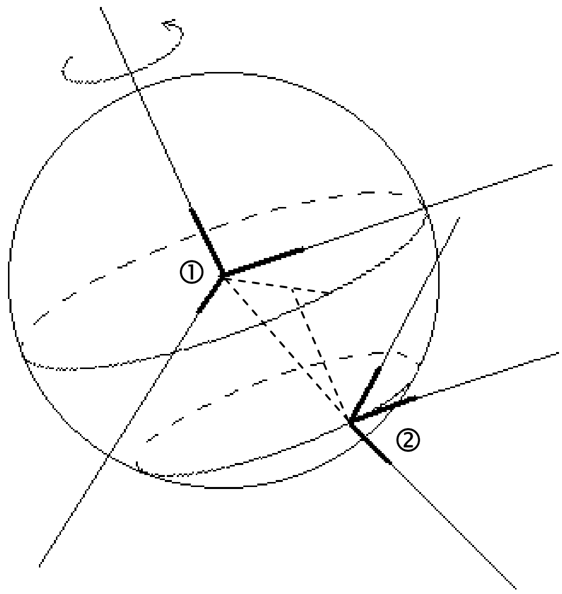
- un repère d'espace (base orthonormée) pour quantifier la position ;
- un repère de temps (horloge) pour associer une date à chaque position.

A retenir :

Référentiel terrestre ② : Il est immobile à la surface de la Terre mais ses axes tournent pour accompagner le mouvement circadien de la Terre autour de son axe de rotation Nord – Sud.

Référentiel géocentrique ① : Il est placé au centre de la Terre. Ses axes ont des directions constantes dans le temps.

Référentiel héliocentrique : Placé au centre du Soleil avec des axes de directions constantes.



Le référentiel placé au centre d'un astre a toujours un nom qui se finit par le suffixe –centrique comme par exemple celui de la Lune (sélénocentrique) ou de la planète Mars (aréocentrique).

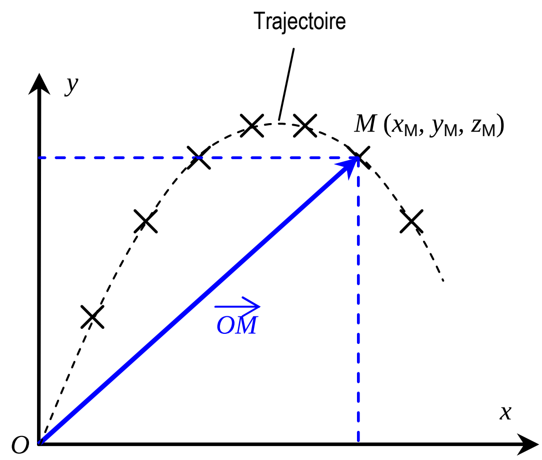
2. Grandeurs cinématiques

2.1. Le vecteur position

Dans une base orthonormée, on peut repérer la position d'un point mobile noté M à l'aide de ses coordonnées x_M, y_M et z_M.

On peut aussi repérer sa position à l'aide du vecteur $\overrightarrow{OM}$ appelé vecteur position ayant les mêmes coordonnées (composantes) que le point M :

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M - x_0 \\ y_M - y_0 \\ z_M - z_0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = x_M\ \vec{i} + y_M\ \vec{j} + z_M\ \vec{k}$$



L'ensemble des points qu'occupe successivement le mobile M au cours du temps est appelé trajectoire.

Lorsqu'un mobile se déplace sur sa trajectoire, sa position change au cours du temps. A chaque position OM est donc associée une date t.

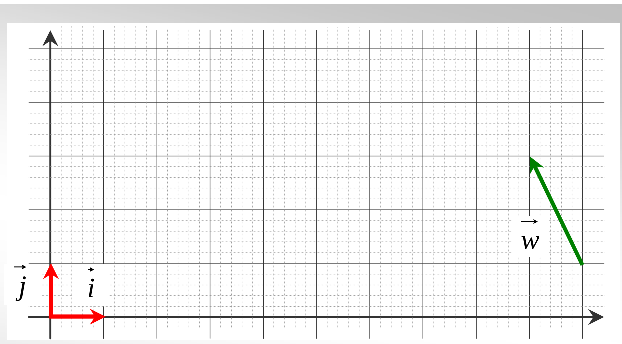
La position étant fonction du temps, on la notera : $\overrightarrow{OM}(t)$

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

avec $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ des fonctions qui dépendent du temps t.

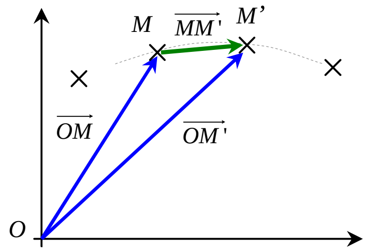
Exercice 1 :

1. Tracer ci-contre les vecteurs $\vec{u}$ (2 ;3) et $\vec{v}$ (3 ;-2).
2. Sachant que $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ réécrire de la même manière le vecteur $\vec{v}$.
3. Donner les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{w}$.
4. Calculer la norme de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



2.2. Le vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée ($m \cdot s^{-1}$) caractérise la variation du vecteur position en fonction du temps. Si l'on cherche à déterminer la vitesse instantanée d'un mobile au point M à une date t donnée à partir d'un relevé de position, on doit en réalité se contenter de calculer la vitesse moyenne du mobile sur une durée Δt pendant laquelle le mobile s'est déplacé du point M au point suivant M'.



On peut donc écrire : $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ ⇔ $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}}{t' - t}$

⇔ $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t' - t}$

⇔ $\vec{v} = \dfrac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$ avec $\boxed{\Delta \overrightarrow{OM} \text{ le vecteur variation de vitesse.}}$

Plus l'intervalle de temps Δt est petit (tend vers zéro) plus la vitesse moyenne trouvée correspond précisément à une vitesse instantanée. Mathématiquement, il est possible de faire tendre cet intervalle de temps vers zéro en utilisant la dérivée du vecteur position si l'on dispose des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ décrivant la variation des coordonnées du mobile.

A retenir :

Dans un référentiel donné, à chaque instant, le vecteur vitesse instantanée d'un mobile M est la dérivée par rapport au temps de son vecteur position.

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

Notations possibles

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = \dot{x} = \dfrac{d\,x(t)}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \dfrac{d\,y(t)}{dt} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

La valeur de la vitesse à une date donnée est égale à la norme du vecteur : $\boxed{\left\|\vec{v}\right\| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}}$

Exercice 2 :

La position d'un mobile M au cours du temps est donnée par le vecteur position ci-contre :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = -5t^2 + 10t + 2 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

1. Représenter sa trajectoire dans un repère entre 0 et 3 s.
2. Pourquoi peut-on parler d'un mouvement plan ?
3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du mobile en fonction du temps.
4. Déterminer la valeur de la vitesse du mobile à la date t = 2,0 s.

Graphiquement, sur un relevé de position, le vecteur vitesse en un point M est une moyenne de la vitesse entre le point précédent et le point suivant. Ce vecteur est porté par la tangente à la trajectoire en M et est orienté dans le sens du mouvement.

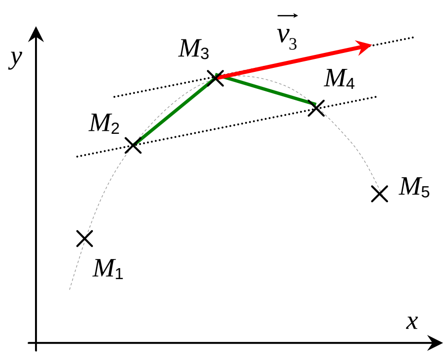
En élargissant l'intervalle de temps du point avant au point après, pour obtenir une meilleure direction du vecteur vitesse, on obtient :

$$\vec{v_3} = \frac{\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_2}}{t_4 - t_2} = \frac{\overrightarrow{OM_4} + \overrightarrow{M_2O}}{t_4 - t_2} = \frac{\overrightarrow{M_2M_4}}{2\tau}$$ avec τ (tau) la durée constante entre deux positions successives du mobile

A retenir :

Méthode de tracé d'un vecteur vitesse instantanée :

Exemple du tracé du vecteur $\vec{v_3}$:



Etape 1 : Mesurer les segments M_2M_3 et M_3M_4

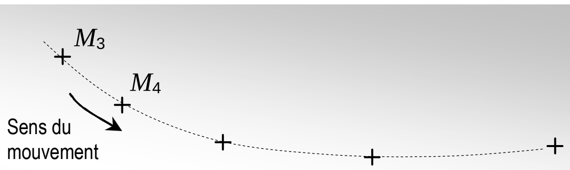
Etape 2 : Calculer la norme du vecteur $\vec{v_3}$

$$\left\|\vec{v_3}\right\| = v_3 = \frac{M_2M_3 + M_3M_4}{2\,\tau}$$

Etape 3 : Tracer ce vecteur sur le relevé en tenant compte de l'échelle sachant qu'il doit être porté par la tangente à la courbe au point M_3.

Exercice 3 :

1. Définir le mouvement de ce mobile.
2. Calculer la valeur v_5 du vecteur vitesse $\vec{v_5}$ au point M_5.
3. Construire sur le schéma ci-contre le vecteur vitesse au point M_5.



Données : Echelle des longueurs : 1 cm ⇔ 20 cm (= 1/20ième) — Intervalle de temps entre deux positions : Δt = 100 ms

2.3. Le vecteur accélération

Notations possibles

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = \dfrac{d\,v_x(t)}{dt} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = \dfrac{d\,v_y(t)}{dt} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Le vecteur accélération ($m{\cdot}s^{-2}$) caractérise la variation du vecteur vitesse en fonction du temps.

Dans un référentiel donné, à chaque instant, le vecteur accélération instantanée d'un mobile M est la dérivée par rapport au temps de son vecteur vitesse.

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}}{dt}}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \dot{v}_x\,\vec{i} + \dot{v}_y\,\vec{j} + \dot{v}_z\,\vec{k}$$

A noter : $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = \dfrac{d\,v_x}{dt} = \dfrac{d^2\,x}{dt^2}$ - De même pour a_y et a_z

Sur un relevé de position, pour tracer le vecteur accélération en un point, il faut au préalable tracer le vecteur variation de vitesse : $\boxed{\Delta\vec{v}}$
Une fois ce vecteur tracé, on le mesure pour en déterminer sa norme exprimée en m/s.

Car, comme : $\vec{a}(t) = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ alors $\left\|\vec{a}(t)\right\| = \dfrac{\left\|\Delta\vec{v}\right\|}{\Delta t}$

A retenir :

Méthode de tracé d'un vecteur accélération :

Exemple du tracé du vecteur $\vec{a_4} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta v_4}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v_5} - \vec{v_3}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v_5} - \vec{v_3}}{2\tau}$

Etape 1. Tracer le vecteur vitesse $\vec{v_3}$ en M_3 et $\vec{v_5}$ en M_5.

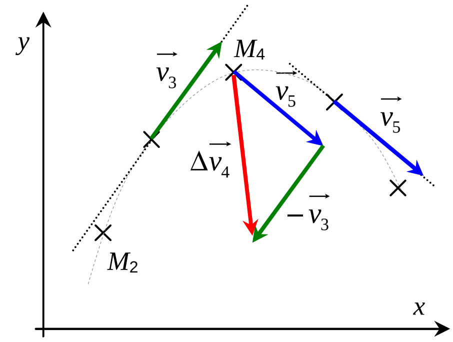
Etape 2 : Construire en partant de M_4 le vecteur : $\overrightarrow{\Delta v_4} = \vec{v_5} - \vec{v_3}$

Etape 3 : Mesurer la norme de ce vecteur variation de vitesse.

Etape 4 : Calculer la norme de l'accélération grâce à la formule :

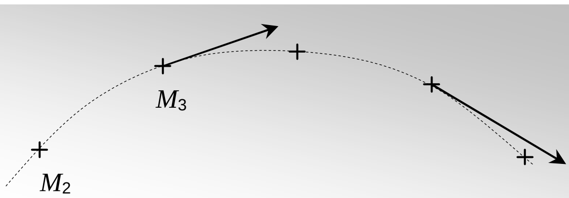
$$a_4 = \frac{\Delta v_4}{2\,\tau}$$

Etape 5 : Tracer ce vecteur accélération dans le même sens et la même direction que $\overrightarrow{\Delta v_4}$ en tenant compte de l'échelle.



Exercice 4 :

1. Sachant que les vecteurs vitesse ont été tracés avec l'échelle 1 cm ⇔ 2,0 m/s déterminer la valeur de la vitesse au point M_3 et au point M_5.
2. Tracer ci-contre le vecteur $\overrightarrow{\Delta v_4}$ et en déduire sa valeur.
3. Calculer et construire alors avec une échelle adéquate le vecteur accélération $\vec{a_4}$ sachant que l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux positions successives est Δt = 40 ms.

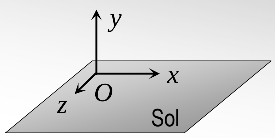


Exercice 5 :

Un mobile ponctuel M en chute libre a été lancé en l'air de sorte que sa position par rapport à l'origine O d'un repère (O; x, y, z) est donnée au cours du temps par le vecteur position suivant :

1. Le mouvement du mobile est-il plan ? Justifier.
2. Déterminer la position de ce mobile à l'origine du temps.
3. Rechercher la date t_P à laquelle le point M retombe au sol.
4. Donner l'expression du vecteur vitesse en fonction du temps.
5. Calculer la valeur de la vitesse du mobile à la date t = 2,0 s.
6. Montrer que cette expérience n'a pas été faite sur Terre.

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} x(t) = -3t + 5 \\ y(t) = -0{,}8t^2 + 10t \\ z(t) = 2{,}5 \end{pmatrix}$$

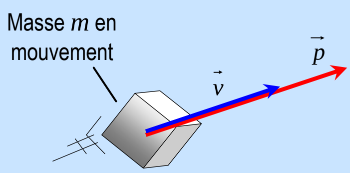


Pour aller plus loin...

On peut alors définir un outil pratique appelé vecteur quantité de mouvement défini comme étant égal au produit de la masse m du mobile par son vecteur vitesse v à une date donnée :

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

m en kg
v en $m{\cdot}s^{-1}$
p en $kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}$

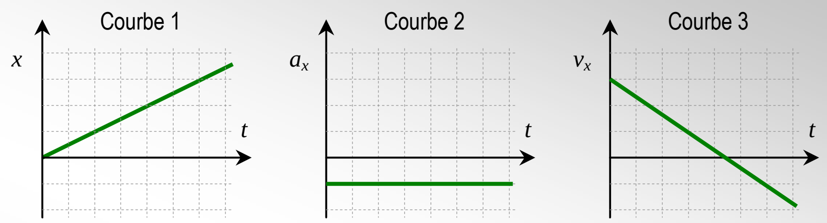


Le vecteur quantité de mouvement a toujours même direction et même sens que le vecteur vitesse dont il est issu.

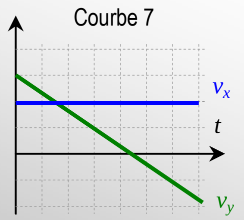
Exercice 6 :

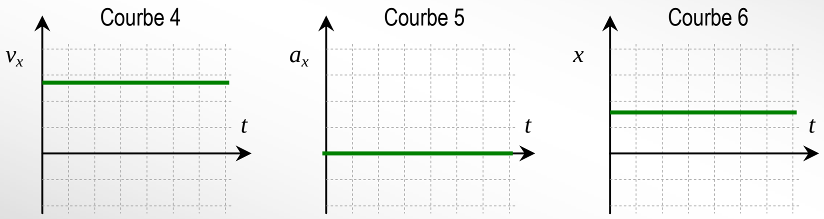
On considère plusieurs mouvements d'un mobile M le long d'un axe rectiligne $[O, x)$.
Ces mouvements sont décrits par les courbes de 1 à 6.

1. Préciser les courbes qui peuvent être en accord avec le fait que M puisse être immobile sur l'axe.
2. De même, préciser les courbes compatibles avec un mobile en mouvement rectiligne uniforme.
3. Pour finir, préciser les courbes compatibles avec un mobile en mouvement rectiligne accéléré.



4.1. Préciser le type de mouvement du mobile dont les coordonnées du vecteur vitesse sont représentées sur la courbe 7.
4.2. Déterminer la vitesse initiale de ce mobile.
4.3. Déterminer sa vitesse au sommet de sa trajectoire.



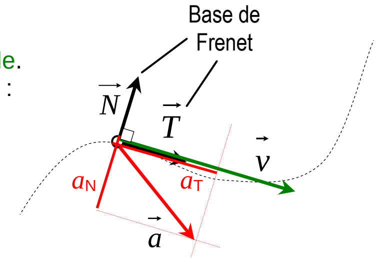


3. Base de Frenet

3.1. Définition

La base de Frenet est une base orthonormée centrée à chaque instant sur le centre de gravité du mobile.
Elle est composée de deux vecteurs unitaires (de longueur égale à l'unité 1) perpendiculaires entre eux :

- Le vecteur unitaire $\vec{N}$ pour normal (au sens « perpendiculaire à »)
- Le vecteur unitaire $\vec{T}$ pour tangentiel qui, comme son nom l'indique, est celui qui est pris tangent à la trajectoire.



On peut alors exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du mobile dans cette base à chaque instant.

Le vecteur vitesse étant toujours tangent à la trajectoire d'un mobile, il sera toujours orienté selon le vecteur unitaire tangentiel. Ainsi, on aura :

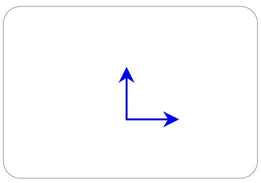
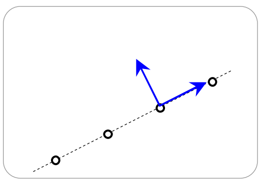
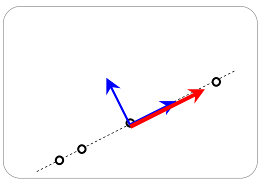
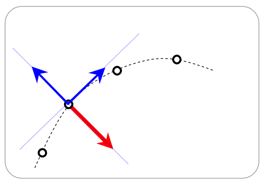
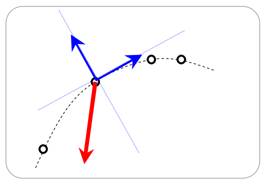
$$\vec{v} = v_T\vec{T} + v_N\vec{N} \Leftrightarrow \vec{v} = v_T\vec{T} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} v_T \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur accélération, lui, possède dans cet exemple une coordonnée non nulle selon chacun des deux axes. On aura alors ici :

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N} \Leftrightarrow \vec{a}\begin{pmatrix} a_T \\ a_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a}\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ -1{,}1 \end{pmatrix}$$

3.2. Utilisation

On peut définir 5 types de mouvement pour un mobile :

Immobile	Rectiligne uniforme	Rectiligne accéléré	Curviligne uniforme	Curviligne accéléré
				
$a_T = 0$	$a_T = 0$	$a_T \neq 0$	$a_T = 0$	$a_T \neq 0$
$a_N = 0$	$a_N = 0$	$a_N = 0$	$a_N \neq 0$	$a_N \neq 0$
$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$	$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$	$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$	$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$	$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$
$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	$\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	$\Leftrightarrow \vec{a} = a_T\vec{T} = \vec{a_T}$	$\Leftrightarrow \vec{a} = a_N\vec{N} = \vec{a_N}$	

A retenir :

- L'immobilité ou le mouvement rectiligne et uniforme sont en physique une seule et même situation. Les lois de la physique s'y appliquent de la même manière. Dans ces deux situations, l'accélération du mobile est nulle et la vitesse est constante.
- Mouvement rectiligne ⇔ $a_N = 0$
- Mouvement curviligne ⇔ $a_N \neq 0$
- Mouvement uniforme ⇔ $a_T = 0$
- Mouvement accéléré ⇔ $a_T \neq 0$

$\boxed{\text{Mouvement rectiligne et uniforme : } a_T = a_N = 0}$