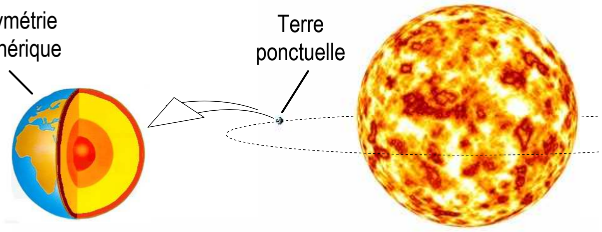
Ch. 5 : Mouvement dans un champ de gravité

1. Champ de pesanteur



Le champ de pesanteur g exercée par une masse M à symétrie sphérique à une distance r de son centre de masse est donné par l'expression :

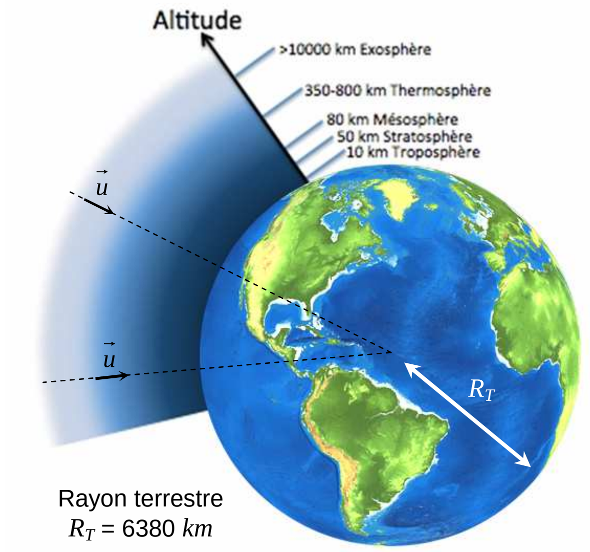
$$\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \cdot \vec{u}$$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire centripète.

Exercice 1 :

Théodore von Karman, physicien d'origine hongroise, calcula l'altitude à partir de laquelle l'atmosphère terrestre devient trop ténue pour des applications aéronautiques. Cette limite, appelée ligne de Karman et située à 100 km d'altitude, définit grossièrement la limite entre l'atmosphère terrestre et l'espace pour la *Fédération Aéronautique Internationale*.

1. D'après la définition de la ligne de Karman, où se trouve la Station Spatiale Internationale située à 410 km au dessus du niveau de la mer ?
2. Déterminer à l'aide de l'expression donnée ci-dessus la valeur du champ de pesanteur terrestre au niveau de la mer, celle à l'altitude de la station spatiale ISS et celle à la limite supérieure de l'exosphère.
3. Expliquer la raison pour laquelle cette station reste à une altitude constante alors qu'elle n'est propulsée par aucun moteur.

Données : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$ - $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg



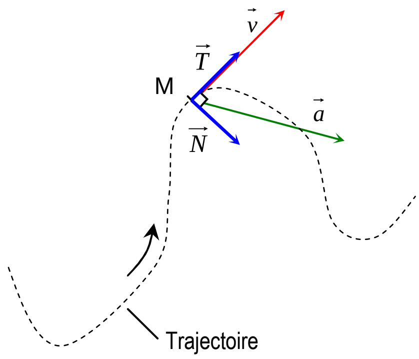
A noter :

- Le champ de pesanteur exercé par un corps ponctuel ou à symétrie sphérique est centripète. Son intensité $\|\vec{g}\|$ diminue de manière continue avec la distance du centre du corps.
- A l'échelle de la Terre, ce champ vectoriel n'est pas constant, ni en direction, ni en intensité.

2. Etude d'un mouvement orbital simple

2.1. Accélération et Base de Frenet

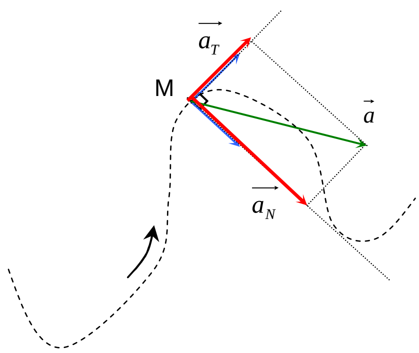
En cinématique du point, la base de Frenet est un outil d'étude permettant d'exprimer plus facilement les vecteurs vitesse et accélération d'un mobile M en mouvement.



A retenir :

- Les vecteurs $\vec{T}$ (tangentiel) et $\vec{N}$ (normal) sont unitaires et orthogonaux entre eux.
- Le vecteur vitesse d'un mobile est toujours tangent à la trajectoire : $\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{T}}$
- Le vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet : $\boxed{\vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}}$

avec :
- a_N l'accélération normale telle que : $\boxed{a_N = \frac{v^2}{R}}$
- a_T l'accélération tangentielle telle que : $\boxed{a_T = \frac{dv}{dt}}$



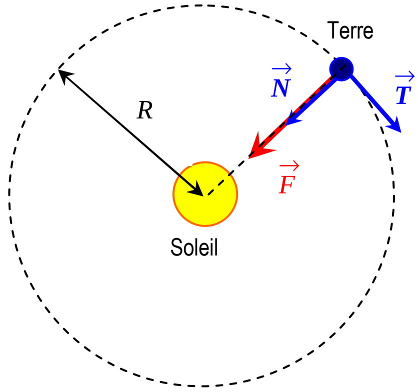
Exercice 2 :

Définir les conditions nécessaire sur a_N et a_T pour :

a) un mouvement rectiligne et uniforme
b) un mouvement circulaire et uniforme
c) un mouvement rectiligne accéléré

2.2. Nature du mouvement

Le mouvement d'un objet en orbite autour d'un astre est toujours une ellipse. Dans certains cas cette ellipse est un cercle ou s'en approche fortement, comme par exemple pour l'orbite de la Terre dans le référentiel héliocentrique.



Considérons le mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil :

Système étudié : Terre de masse M_T

Référentiel d'étude : héliocentrique supposé galiléen

Inventaire des forces : force de gravité exercée par le Soleil sur la Terre.

Comme la masse de la Terre est constante, d'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} = M_T \cdot \vec{a}$$

Or la force de gravité exercée par le Soleil de masse M_S sur la Terre a pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N}}$$

F en N
M en kg
R en m
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

G = constante de gravitation universelle

D'où : $\vec{F} = M_T \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N} = M_T \left(a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2}} \cdot \vec{N} = \boxed{M_T a_N} \cdot \vec{N} + \boxed{M_T a_T} \cdot \vec{T}$$

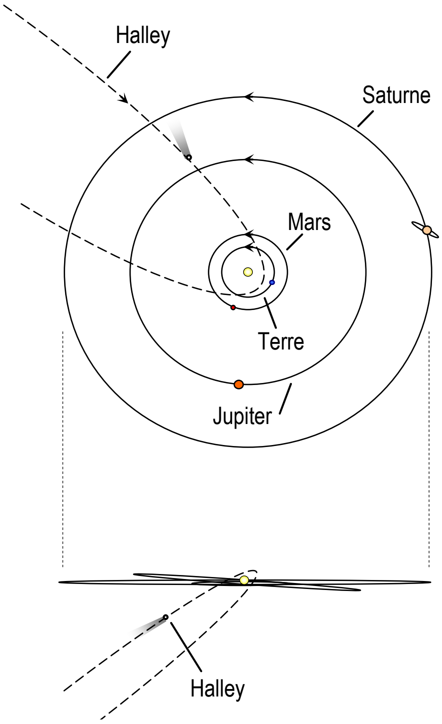
Donc, par identification : $\begin{cases} M_T a_N = G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \\ M_T a_T = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_N = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2} \\ a_T = 0 \end{cases}$$

Or si $a_T = 0$ alors : $\frac{dv}{dt} = 0$ car, par définition $a_T = \frac{dv}{dt}$

Et si $\frac{dv}{dt} = 0$ alors : $v = \left\|\vec{v}\right\| = cste.$

Ainsi, si la trajectoire d'un objet en orbite gravitationnelle est circulaire alors son mouvement est nécessairement uniforme.

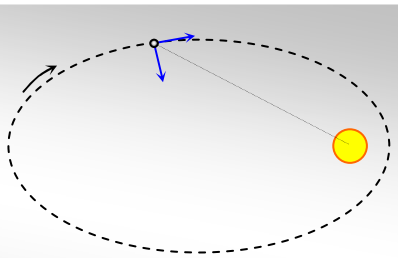


Exemples :

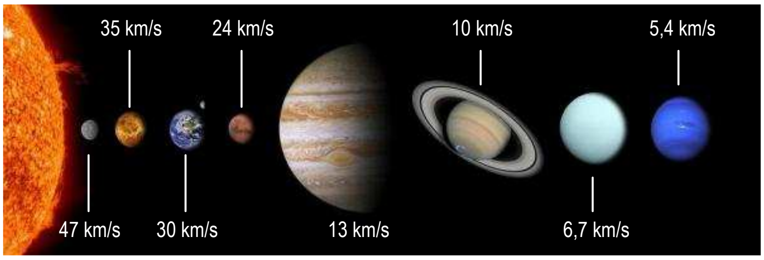
- La Terre ayant une orbite quasi-circulaire, sa vitesse reste toujours voisine de 30 km/s
- La comète de Halley ayant une orbite très elliptique, sa vitesse varie énormément (de 1 à 60 km/s environ)

Exercice 3 :

1. Rechercher les unités de la constante de gravitation universelle.
2. Montrer à partir du schéma de l'orbite elliptique ci-contre et de la deuxième loi de Newton que l'accélération tangentielle du corps en orbite dans cette situation ne peut pas être nulle.
3. En déduire la nature du mouvement de ce corps autour du Soleil.



2.3. Vitesse orbitale



D'après la partie précédente on a : $a_N = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$

Or, par définition : $a_N = \frac{v^2}{R}$

D'où : $\frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_S}{R^2}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}}}$$

v en m/s
M_S en kg
R en m
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

A noter :

- Cette relation montre clairement que la masse d'une planète n'a aucune influence sur sa propre vitesse orbitale autour du Soleil.
- La vitesse orbitale d'une planète ne dépend que de la distance R (rayon de son orbite) qui la sépare du Soleil.
Plus une planète est proche du Soleil, plus elle tourne vite sur son orbite.

2.4. Période de révolution

La période de révolution T d'un astre est le temps nécessaire à ce dernier pour effectuer un tour autour de l'astre qui le maintient en orbite. Par exemple, la période de révolution de la Terre autour du Soleil est d'un an.

En considérant que l'orbite de la Terre est un cercle, la longueur L de cette orbite est donc le périmètre du cercle de rayon R :

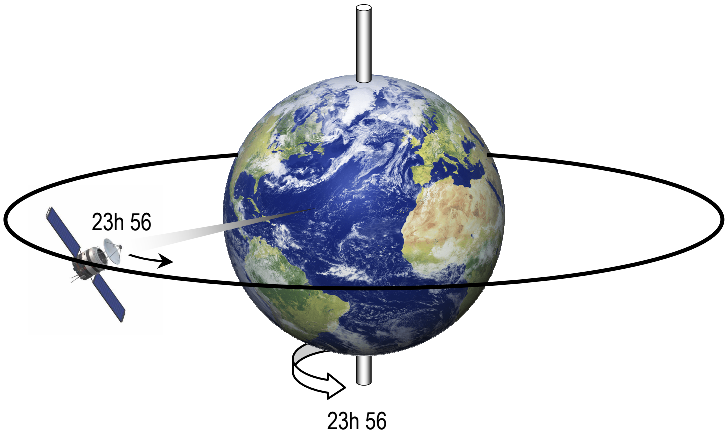
$$L = 2\pi \cdot R$$

La vitesse v de la Terre sur son orbite étant constante, sa valeur instantanée est à chaque instant égale à sa valeur moyenne, donc :

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{L}{T} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$$



A noter :

L'orbite géostationnaire (GEO pour GEostationary Orbit) est une orbite circulaire dans le plan équatorial de la Terre de période orbitale égale à la période de rotation de la Terre, soit 23 h 56 min et 4 s.

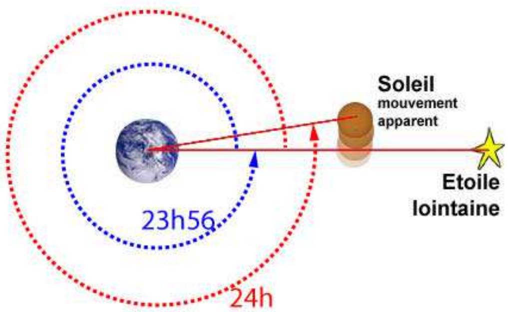
Un objet placé sur cette orbite géostationnaire reste en permanence au-dessus du même point de l'équateur.

Jour solaire : durée de 24 h 00 min s'écoulant entre deux passages consécutifs du Soleil à la verticale d'un même méridien terrestre.

Jour sidéral : durée de 23 h 56 min nécessaire à la Terre pour faire exactement un tour sur elle-même (référentiel géocentrique).

Exercice 4 :

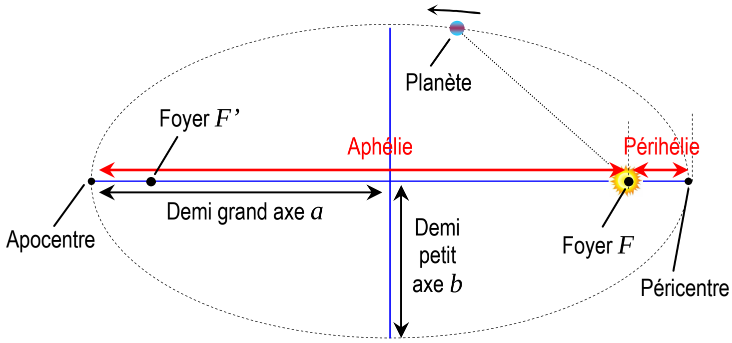
1. Déterminer l'expression littérale de l'altitude h de l'orbite géostationnaire en fonction de la période de révolution T_{SAT} des satellites qui s'y trouvent, du rayon R_T de la Terre et de sa masse M_T.
2. Calculer cette altitude en km et la comparer à la distance Terre-Lune.



A noter :

Il ne faut pas confondre orbite géostationnaire (GEO) et orbite géosynchrone (GSO). La GSO est une orbite elliptique (et donc pas nécessairement circulaire) de période 23 h 56 min et qui est inclinée par rapport au plan équatorial terrestre.

3. Lois de Kepler



Loi des orbites (première loi de Kepler - 1609)

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

A noter :

- Le péricentre est le point de l'orbite le plus proche de l'astre central.
  Si l'astre central est le Soleil on parle plus précisément de périhélie. Pour la Terre, c'est le périgée.
- L'apocentre est le point de l'orbite le plus éloigné de l'astre central.
  Si l'astre central est le Soleil on parle plus précisément d'aphélie. Pour la Terre, c'est l'apogée.

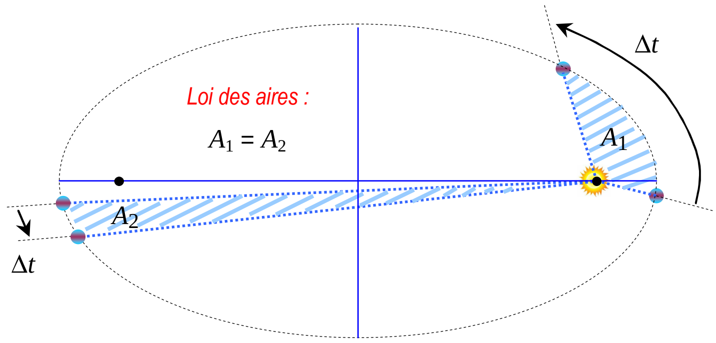
a est le demi-grand axe et b est le demi-petit axe.

Loi des aires (deuxième loi de Kepler - 1609)

Le segment [SP] (ou rayon vecteur) qui relie le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

A noter :

Cette loi implique que plus la planète s'approche du Soleil plus sa vitesse augmente. De même, plus elle s'en éloigne, plus sa vitesse diminue.



Loi des périodes (troisième loi de Kepler - 1618)

Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de son orbite.

$$\boxed{T^2 = k \times a^3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

avec k une constante et a le demi-grand axe de l'ellipse.

Si la trajectoire de la planète est assimilable à un cercle de rayon R, comme un cercle est aussi une ellipse, mais une ellipse particulière pour laquelle $a = b = R$, alors la troisième loi de Kepler devient :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = k}$$

Johannes Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler

Astronome allemand, et disciple de Tycho Brahe, il n'en devient pas moins farouchement "copernicien". En 1601, à la mort de Brahe, il s'empare de ses carnets et tente alors d'expliquer les imperfections constatées sur le mouvement apparent de Mars. Faisant une confiance aveugle dans les mesures de son défunt maître, il est donc contraint de remettre en question le mouvement parfaitement circulaire des planètes. Nommé mathématicien impérial il put se consacrer à ses recherches à l'abri de l'Eglise catholique.

Exercice 5 :

1. En partant de la donnée ci-contre, rechercher l'expression de la constante k en fonction de G et M_S.
2. Sachant que la masse du Soleil varie légèrement dans le temps, qu'entend-on par "constante k " ?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$$

Ainsi, quelle que soit la planète P de période de révolution T en orbite autour du Soleil à une distance R, le rapport du carré de sa période sur le cube du rayon de son orbite ne dépend que de la masse du Soleil.

Ainsi : $\dfrac{T_{Terre}^{\ 2}}{R_{Terre}^{\ 3}} = \dfrac{T_{Mars}^{\ 2}}{R_{Mars}^{\ 3}} = \dfrac{T_{Halley}^{\ 2}}{a_{Halley}^{\ 3}} = \dots = \dfrac{4\pi^2}{GM_S}$ mais : $\dfrac{T_{Lune}^{\ 2}}{R_{Lune}^{\ 3}} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ donc : $\dfrac{T_{Terre}^{\ 2}}{R_{Terre}^{\ 3}} \neq \dfrac{T_{Lune}^{\ 2}}{R_{Lune}^{\ 3}}$

A noter :

Les lois de Kepler, bien qu'écrites pour les planètes de notre système solaire, s'appliquent pour tout corps en orbite elliptique autour d'un astre.

Ainsi : $\dfrac{T_{Lune}^{\ 2}}{R_{Lune}^{\ 3}} = \dfrac{T_{Satellite}^{\ 2}}{R_{Satellite}^{\ 3}} = \dfrac{4\pi^2}{GM_{Terre}}$