Correction du contrôle n°5 – 2015

Exercice 1 : **Décollage d'une fusée**

1.1. C'est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie (première loi de Newton) est vérifié.

1.2. Comme la fusée est initialement immobile, d'après la première loi de Newton (principe de l'inertie) elle est donc soumise à des forces qui se compensent (pseudo-isolée).

1.3. La fusée étant immobile, elle n'est soumise à aucune force de frottement. Les forces qui s'exercent sur la fusée sont donc :
- son poids
- la réaction du support
- la poussée d'Archimède de l'air

2.1. Pour que la fusée puisse décoller, il faut que $F > P$.

2.2. D'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

En projetant sur l'axe verticale, on obtient :

$$-P + F = ma$$

$$\Leftrightarrow \quad a = -g + \frac{F}{m}$$

2.3. Pour obtenir la vitesse, il faut intégrer l'accélération. Donc :

$$v = a \cdot t + cste$$

Or, à l'origine du temps, la vitesse de la fusée est nulle, donc $cste = 0$ et :

$$v = a \cdot t$$

$$\Leftrightarrow \quad v = 4{,}0 \times 5{,}0 = 20\ m \cdot s^{-1}$$

En intégrant la vitesse on trouve l'altitude z de la fusée en fonction du temps :

$$z(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad z(5{,}0) = \frac{1}{2} \times 4{,}0 \times 5{,}0^2 = 50\ m$$

Exercice 2 : **Tir au but**

1. D'après la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

2. On intègre le vecteur accélération pour trouver le vecteur vitesse :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} cste \\ -gt + cste' \end{pmatrix}$$

Or le vecteur vitesse initial est, d'après le schéma :

$$\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_0 \cos\beta \\ v_0 \sin\beta \end{pmatrix}$$

Donc $\forall t$, on aura :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \cos\beta \\ -gt + v_0 \sin\beta \end{pmatrix}$$

Pour trouver les équations horaires du mouvement, on intègre le vecteur vitesse et on obtient finalement :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} v_0 \cos\beta \times t \\ -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin\beta \times t \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\beta \times t \\ z(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin\beta \times t \end{cases}$$

3. L'équation de la trajectoire est donc :

On a : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\beta}$ Donc $z(t) = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0 \cos\beta}\right)^2 + v_0 \sin\beta \times \dfrac{x}{v_0 \cos\beta}$

⇔ $z(x) = -\dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\beta} \cdot x^2 + \tan\beta \cdot x$

4. Lorsque la balle arrive à la flèche, la composante verticale du vecteur vitesse est nulle. Ainsi :

$-gt_F + v_0 \sin\beta = 0$

⇔ $t_F = \dfrac{v_0 \sin\beta}{g}$

On place alors cette date dans l'équation horaire de l'abscisse :

$x(t) = v_0 \cos\beta \times t_F$

⇔ $x(t) = v_0 \cos\beta \times \dfrac{v_0 \sin\beta}{g} = \dfrac{{v_0}^2 \cos\beta \cdot \sin\beta}{g}$

⇔ $x(t) = \dfrac{{v_0}^2 \sin(2\beta)}{2g}$

5. A l'aide de l'équation de la trajectoire, recherchons l'altitude de la balle lorsqu'elle arrive à hauteur du but :

$z(10) = -0{,}10 \times 10^2 + 2{,}0 \times 10 = 10\ m$

Or le but à une hauteur de 3,0 *m* donc la balle passe 7,0 *m* au dessus du but : le tir est raté.

Exercice 3 : Station orbitale

1. Les planètes décrivent autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.
2. D'après la troisième loi de Kepler, $\dfrac{T^2}{a^3}$ est une constante pour tout objet en orbite autour du même astre.

Comme ISS est en orbite autour de la Terre, il faut utiliser les données de la Lune pour chercher l'expression littérale désirée. On aura :

$\dfrac{{T_{ISS}}^2}{{R_{ISS}}^3} = \dfrac{{T_L}^2}{{R_L}^3}$

⇔ $T_{ISS} = T_L \cdot \sqrt{\left(\dfrac{R_{ISS}}{R_L}\right)^3}$

3.1. Comme le mouvement est circulaire, la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur la station est radiale (portée par un rayon de l'orbite) et donc, d'après la deuxième loi de Newton, on aura :

$\Sigma\vec{F} = M_{ISS}\vec{a}$

⇔ $G \cdot \dfrac{M_T \cdot M_{ISS}}{{R_{ISS}}^2}\vec{N} = M_{ISS}\vec{a}$

⇔ $\vec{a} = \dfrac{G \cdot M_T}{{R_{ISS}}^2}\vec{N}$ d'où $a_T \cdot \vec{T} = \vec{0}$ ⇔ $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$ donc la valeur de la vitesse est constante.

3.2. D'après la question précédente, on a :

$a_N = \dfrac{v^2}{R_{ISS}} = \dfrac{G \cdot M_T}{{R_{ISS}}^2}$

⇔ $v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_{ISS}}}$

3.3. On sait que : $v = \dfrac{d}{\Delta t}$

⇔ $v = \dfrac{2\pi \cdot R_{ISS}}{T_{ISS}}$

⇔ $v \approx \dfrac{6 \times 7{,}0 \cdot 10^6}{90 \times 60} = \dfrac{42 \cdot 10^6}{5{,}4 \cdot 10^3} = \dfrac{4{,}2 \cdot 10^7}{5{,}4 \cdot 10^3} \approx 1 \cdot 10^4\, m \cdot s^{-1}$