Correction du contrôle n°4 – 2016

La méthode réaliste :

1.1. Cet habitant a un mouvement circulaire uniforme.

1.2. L'habitant fait un tour en une période. Ainsi :

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \frac{2\pi R}{10\pi} = \frac{R}{5{,}0} = \frac{250}{5{,}0} = 50\ m \cdot s^{-1}$$

1.3. L'accélération dans la base de Frenet s'écrit :

$$\vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}$$

Or, comme l'habitant a un mouvement uniforme, son accélération tangentielle est nulle. Ainsi :

$$\vec{a} = a_N \cdot \vec{N}$$

d'où : $$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$

1.4. Calcul de l'accélération de l'habitant :

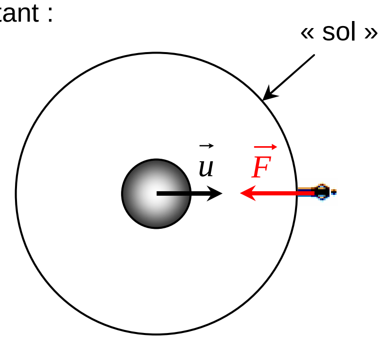
$$a = \frac{50^2}{250} = \frac{2500}{250} = 10\ m \cdot s^{-2}$$

Cette accélération a la même valeur que celle du champ de pesanteur terrestre. Ainsi la gravité artificielle sur le « sol » de la station est identique à celle de la Terre. Le corps de l'habitant ne se fragilisera pas.

La méthode "science fiction" :

2.1. Expression du vecteur force de gravitation exercée par l'astre central sur l'habitant :

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m \cdot M}{D^2} \cdot \vec{u}$$



2.2. En posant : $$\vec{P} = \vec{F}$$

Il vient : $$m \cdot \vec{g} = -G \cdot \frac{mM}{D^2} \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{g} = -G \cdot \frac{M}{D^2} \cdot \vec{u}$$

Donc : $$g = G \cdot \frac{M}{D^2}$$

2.3. En utilisant l'expression précédente, on obtient l'égalité suivante :

$$M = \frac{g \cdot D^2}{G}$$

Application numérique : $$M = \frac{10 \times 100^2}{1 \cdot 10^{-10}}$$

$$M = \frac{1{,}0 \times 10^5}{1 \cdot 10^{-10}}$$

$$M = 1 \cdot 10^{15}\ kg$$

Ainsi, l'ordre de grandeur de la masse centrale est $1 \cdot 10^{15}\ kg$.

3.1. La station tourne autour de la Terre, tout comme la Lune. Ainsi, d'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{{T_S}^2}{A^3} = \frac{{T_L}^2}{{A_L}^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad T_S = T_L \cdot \sqrt{\frac{A^3}{{A_L}^3}}$$

3.2. En utilisant la formule précédente on aura :

$$T_S = 2 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{(1{,}0 \cdot 10^7)^3}{(3 \cdot 10^8)^3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad T_S = 2 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{1{,}0 \cdot 10^{21}}{27 \cdot 10^{24}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad {T_S}^2 \approx 4 \cdot 10^{12} \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^{21}}{3 \cdot 10^{25}}$$

$$\Leftrightarrow \quad {T_S}^2 \approx \frac{4 \cdot 10^{33}}{3 \cdot 10^{25}} \approx 1 \cdot 10^8$$

$$\Leftrightarrow \quad T_S \approx 1 \cdot 10^4 \ s$$

3.3. Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

3.4. La Terre se trouve donc placée sur l'un des foyers de l'ellipse que décrit la station lors de son mouvement orbital.

3.5. Calcul de l'apocentre :

D'après le schéma ci-contre, on remarque que :

$$2A = péri + apo$$

$$\Leftrightarrow \quad apo = 2A - péri$$

Application numérique : $apo = 2 \times 10 - 8{,}0$

$$apo = 12 \ Mm$$